

**Zadatak.** Dat je dvocifreni binarni brojač. Protokom vremena brojač menja svoje stanje:  $00 \rightarrow 01 \rightarrow 10 \rightarrow 11 \rightarrow 00 \rightarrow 01 \rightarrow \dots$

- a) Iskaznom formulom opisati vezu između dva uzastopna stanja:  $p_i q_i \rightarrow p_{i+1} q_{i+1}$ .
- b) Korišćenjem *minisat*-a dokazati da se nakon 4 prelaza dobija isto početno stanje.

**Rešenje.** Veze između  $p_i q_i$  i  $p_{i+1} q_{i+1}$  (za  $i = 0, 1, 2, 3$ ), date su sa:

$$\begin{aligned} q_{i+1} &\Leftrightarrow \neg q_i \\ p_{i+1} &\Leftrightarrow (\neg q_i \wedge p_i) \vee (q_i \wedge \neg p_i) \end{aligned}$$

Svođenjem na CNF, dobija se sledeći skup klauza:

$$\begin{aligned} &(\neg q_{i+1} \vee \neg q_i) \\ &(q_i \vee q_{i+1}) \\ &(\neg p_{i+1} \vee \neg q_i \vee \neg p_i) \\ &(p_{i+1} \vee q_i \vee \neg p_i) \\ &(\neg p_{i+1} \vee q_i \vee p_i) \\ &(p_{i+1} \vee \neg q_i \vee p_i) \end{aligned}$$

Ono što hoćemo da dokažemo da je  $(p_0 \Leftrightarrow p_4) \wedge (q_0 \Leftrightarrow q_4)$  logička posledica gornjih veza, tj. da je odgovarajuća implikacija tautologija. To možemo da dokažemo tako što ćemo pomoću SAT solvera dokazati da je negacija te implikacije kontradikcija, a to je sledeća CNF formula:

$$\begin{aligned}
&(\neg q_1 \vee \neg q_0) \\
&(q_0 \vee q_1) \\
&(\neg p_1 \vee \neg q_0 \vee \neg p_0) \\
&(p_1 \vee q_0 \vee \neg p_0) \\
&(\neg p_1 \vee q_0 \vee p_0) \\
&(p_1 \vee \neg q_0 \vee p_0) \\
&(\neg q_2 \vee \neg q_1) \\
&(q_1 \vee q_2) \\
&(\neg p_2 \vee \neg q_1 \vee \neg p_1) \\
&(p_2 \vee q_1 \vee \neg p_1) \\
&(\neg p_2 \vee q_1 \vee p_1) \\
&(p_2 \vee \neg q_1 \vee p_1) \\
&(\neg q_3 \vee \neg q_2) \\
&(q_2 \vee q_3) \\
&(\neg p_3 \vee \neg q_2 \vee \neg p_2) \\
&(p_3 \vee q_2 \vee \neg p_2) \\
&(\neg p_3 \vee q_2 \vee p_2) \\
&(p_3 \vee \neg q_2 \vee p_2) \\
&(\neg q_4 \vee \neg q_3) \\
&(q_3 \vee q_4) \\
&(\neg p_4 \vee \neg q_3 \vee \neg p_3) \\
&(p_4 \vee q_3 \vee \neg p_3) \\
&(\neg p_4 \vee q_3 \vee p_3) \\
&(p_4 \vee \neg q_3 \vee p_3) \\
&(\neg p_0 \vee \neg p_4 \vee \neg q_0 \vee \neg q_4) \\
&(p_0 \vee p_4 \vee \neg q_0 \vee \neg q_4) \\
&(\neg p_0 \vee \neg p_4 \vee q_0 \vee q_4) \\
&(p_0 \vee p_4 \vee q_0 \vee q_4)
\end{aligned}$$

SAT rešavač MINISAT zaista potvrđuje da je ovaj skup klauza nezadovoljiv, tj. da je polazna implikacija tautologija.