2. LEKCIJA

USLOVNE VEROVATNOĆE
NEZAVISNOST DOGAĐAJA

USLOVNE VEROVATNOĆE
NEZAVISNOST DOGAĐAJA

Definicija uslovne verovatnoće

Neka u eksperimentu posmatramo dva slučajna događaja *A* i *B*. Ako je poznato da se jedan od njih, na primer događaj *B*, ostvario, treba odrediti verovatnoću da se ostvario i drugi. Tako se, na određen način, meri povezanost događaja, odnosno koliko informacija o realizaciji događaja B menja šanse za realizaciju događaja A. Postavlja se i pitanje da li su te šanse manje, veće ili jednake u odnosu na šansu ostvarivanja događaja A, ako nema dodatnih informacija.

Definicija 1. ***Uslovna verovatnoća***

Neka su A i B događaji iz istog prostora verovatnoća $(\Omega,\mathcal{F},P)$ *i neka je* $P(B)>0$. *Tada je uslovna verovatnoća događaja A, ako se ostvario događaj B, jednaka:*

$$P(A \mid B) = \frac{P(AB)}{P(B)}.$$

Za uslovnu verovatnoću $P(A|B)$ koristi se i oznaka $P_B(A)$.

Uslovne verovatnoće događaja iz istog prostora verovatnoća, u odnosu na neki događaj iz tog prostora, imaju sve osobine verovatnoće, tj. zadovoljavaju aksiome $B1^\circ$, $B2^\circ$, $B3^\circ$:

$$B1^\circ \quad P(A \mid B) \geq 0,$$

$$B2^\circ \quad P(\Omega|B)=1,$$

$$B3^\circ \quad P\left[\left(\sum_j A_j\right) \mid B\right] = \sum_j P(A_j \mid B).$$

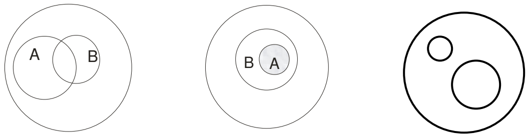
Stoga se i sve druge osobine verovatnoće, navedene u Lekciji 1, prenose u analognom obliku na uslovne verovatnoće.

Ako se posmatra više događaja iz istog prostora verovatnoća, tada se pri određivanju verovatnoće njihovog preseka mogu koristiti uslovne verovatnoće. Naime, neka su $A_1, A_2, ..., A_n$ događaji iz istog prostora elementarnih ishoda i neka je presek tih događaja neprazan skup. Tada je $A_1A_2...A_k \neq \emptyset$ za svako $k=1,2,...n-1$ i važi:

$$P(A_1A_2...A_n) = P(A_1)P(A_2 \mid A_1)P(A_3 \mid A_1A_2)...P(A_n \mid A_1A_2...A_{n-1})$$

(nastavak na str. 4)

☺ Ostvarivanje događaja B u posmatranom eksperimentu označava da je rezultat eksperimenta jedan od elementarnih ishoda koji pripadaju događaju B. U tom slučaju se događaj A može ostvariti samo ako je ostvareni elementarni ishod iz B pripadao i A. Takvo objašnjenje direktno vodi do formule u definiciji 1, jer je sad za ostvarenje događaja A povoljno samo ono što je u A B, a moguće samo ono što je u B. Tu se zapravo primenjuje ideja klasične definicije verovatnoće. Dijagram može da koristi da se razume to objašnjenje.



Sa dijagrama se, međutim, ne može zaključiti kakav je međusobni odnos verovatnoća $P(A|B)$ i $P(A)$. Tačnije, može da bude ili $P(A|B)>P(A)$ ili $P(A|B)<P(A)$ ili $P(A|B)=P(A)$. Videti u Primeru 6 i zadatku posle tog primera.

Primer 1. Uslovna verovatnoća

Na slučajan način se bira jedna karta iz špila od 52 karte. Ako je poznato da je izabrana karta herc, odrediti verovatnoću da je ta karta desetka.

Rešenje:

Neka je A događaj da je slučajno izabrana karta desetka, a B događaj da je slučajno izabrana karta herc. Treba odrediti $P(A|B)$. Događaj AB označava da je izabrana desetka herc. Kako je

$$P(AB)=1/52,\ P(B)=13/52,$$

dobija se da je

$$P(A\mid B)=\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{1/52}{13/52}=\frac{1}{13}.$$

☺ U rezultatu se prepoznaje klasična definicija verovatnoće, jer od karata koje su herc i kojih ima 13, samo je jedna desetka. Stoga se u rešavanju zadataka koji se odnose na prostor elementarnih ishoda sa konačno mnogo jednakoverovatnih ishoda može da primeni klasična definicija verovatnoće pri izračunava-nju uslovnih verovatnoća.

ZADATAK 1.

Odrediti uslovnu verovatnoću događaja da je izabrana karta desetka, ako: a) nema dodatnih informacija, b) znamo da je izabrana karta crne boje i c) znamo da je izabrana karta sa vrednošću većom od 8 (vrednosti su 1,2,…,10,12,13,14).

☺ S obzirom da uslovna verovatnoća ima osobine: nenegativnost, normiranost i aditivnost, zaključuje se da će za uslovne verovatnoće događaja iz istog prostora verovatnoća, važiti formule analogne onima koje iskazuju osobine verovatnoće. Zato je, na primer, $P(\overline{A}\mid B)=1-P(A\mid B)$. Uslovna verovatnoća ima i osobinu monotonosti, tj. ako je $A_1\subset A_2$, onda je $P(A_1\mid B)\le P(A_2\mid B)$.

ZADATAK 2.

Pogledajte u Lekciji 1 ostale osobine verovatnoće i zapišite ih za uslovne verovatnoće.

Nezavisnost događaja

Nezavisnost događaja je jedan od bitnih pojmova u teoriji verovatnoće, a samim tim i u matematičkoj statistici, kao što će se kasnije i videti. Uvodi se sledeća definicija.

Definicija 12. *Nezavisnost događaja*

Neka su događaji A i B iz istog prostora verovatnoća. Ako važi P(AB)=P(A)P(B), tada su događaji A i B nezavisni.

Na osnovu definicije uslovne verovatnoće zaključuje se da za nezavisne događaje A i B važi:

$$P(A \mid B) = P(A) \quad \text{i} \quad P(B \mid A) = P(B)$$

Ako su događaji A i B nezavisni, tada realizacija događaja B ne utiče na verovatnoću događaja A, ali ako su događaji A i B zavisni, tada je verovatnoća $P(A|B)$ različita od $P(A)$ i tada je moguće da bude $P(A|B)>P(A)$, ali takođe i da bude $P(A|B)<P(A)$.

Ako se posmatra više događaja iz istog prostora elementarnih ishoda, onda se govori da su nezavisni u ukupnosti (ili se samo kaže nezavisni) ako je verovatnoća preseka bilo kojih događaja iz tog skupa događaja jednaka proizvodu verovatnoća izdvojenih događaja.

Sledeće tvrđenje daje vezu nezavisnosti i operacija sa događajima.

Teorema 4.

Neka su događaji A, B i C nezavisni i neka je $B_1 = B$ *ili* $B_1 = \overline{B}$, *odnosno* $C_1 = C$ *ili* $C_1 = \overline{C}$. *Tada su nezavisni događaji*

1° $\overline{A}$ *i* $\overline{B}$, $\overline{A}$ *i* $\overline{C}$, $\overline{B}$ *i* $\overline{C}$.

2° A *i* $\overline{B}$, $\overline{A}$ *i* B, A *i* $\overline{C}$, $\overline{A}$ *i* C, B *i* $\overline{C}$, $\overline{B}$ *i* C.

3° A *i* $B_1 \cap C_1$, A *i* $B_1 \cup C_1$.

Data teorema se može uopštiti na slučaj više događaja. Suština je u tome da će novoformirani događaji biti nezavisni ako su njihove komponente iz različitih događaja. Znači, ako su, npr. A, B, C i D nezavisni u ukupnosti, onda su nezavisni, na primer, i događaji A, BC i $\overline{D}$ itd.

(nastavak na str. 6)

☺ Ako su događaji nezavisni, to ne znači da su disjunktni. Naime, važi sledeće: ako su događaji *A* i *B* nezavisni i bar jedan od njih nemoguć događaj, onda su oni disjunktni. Ako su događaji *A* i *B* disjunktni, a ni jedan od njih nije nemoguć, tada su *A* i *B* zavisni događaji.

☺ Ako se posmatra više od dva događaja njihova **nezavisnost u ukupnosti**, označava da verovatnoća preseka bilo koja dva od tih događaja jednaka proizvodu verovatnoća ta dva događaja (što se naziva nezavisnost u parovima), zatim da je verovatnoća preseka bilo koja tri od tih događaja jednaka proizvodu verovatnoća ta tri događaja (što se naziva nezavisnost u trojkama), itd. Na primer, događaji *A, B* i *C* su nezavisni ako i samo ako važe sve sledeće jednakosti:
$P(AB)=P(A)P(B),\ P(AC)=P(A)P(C),\ P(BC)=P(B)P(C)$ *i* $P(ABC)=P(A)P(B)P(C)$.

Da bi se potvrdila nezavisnost *n* događaja treba proveriti $2^n - n - 1$ jednakosti. Ako su sve tačne, događaji su nezavisni, a čim se naiđe na jednu koja nije tačna, događaji su zavisni i ostale jednakosti se ne proveravaju.

Primer 2. Nezavisnost više događaja – šarena piramida

Pravilna trostrana piramida ima jednu stranu obojenu belom bojom, jednu stranu obojenu crvenom, jednu stranu obojenu crnom, a četvrta strana je trobojna: bela, crvena i crna. Piramida se baca i beleži se strana na koju piramida pada (osnova piramide). Ispitati nezavisnost događaja *A*, *B* i *C*, ako je događaj *A*: na osnovi ima bele boje, *B*: na osnovi ima crvene boje i *C*: na osnovi ima crne boje.

Rešenje:

Prema načinu na koji je piramida obojena zaključuje se da je:

$P(A)=P(B)=P(C)=2/4=1/2,\ P(AB)=P(BC)=P(AC)=1/4,\ P(ABC)=1/4.$

Događaji *A, B* i *C* su nezavisni u parovima, ali je $P(ABC)\neq P(A)P(B)P(C)$, što znači da događaji *A*, *B* i *C* nisu nezavisni u ukupnosti.

Dokaz Teoreme 4.

Sva tvrđenja data u iskazu Teoreme 4 se analogno dokazuju, pa je dovoljno da se detaljno izloži dokaz u jednom od slučajeva. Neka je to sledeće tvrđenje: ako su *A*, *B* i *C* nezavisni događaji, tada su nezavisni i *A* i $\overline{C}$. Dakle, treba dokazati da važi

$$P(A\cap\overline{C}) = P(A)P(\overline{C})\,.$$

Događaj *A* se može razložiti na uniju disjunktnih događaja: $A=(A\cap C)\cup(A\cap\overline{C})$,

pa je zato verovatnoća događaja *A*: $P(A)=P(A\cap C)+P(A\cap\overline{C})$.

Zbog nezavisnosti *A* i *C* je $P(A)=P(A)P(C)+P(A\cap\overline{C})$,

pa je $P(A\cap\overline{C})=P(A)-P(A)P(C)=P(A)(1-P(C))=P(A)P(\overline{C})$,

što je i trebalo dokazati (kako se obično u matematici kaže na kraju dokaza ☺)

Two events *A* and *B* are independent if *P(AB)=P(A)P(B)*. Three events *A*, *B* and *C* are said to be independent (or mutually independent) if each pair is independent and if, in addition,

$$P(ABC)=P(A)P(B)P(C).$$

For a set of more than three events to be independent the multiplication rule must hold for all possible subsets.

Formula potpune verovatnoće i Bajesova formula

Neka su $H_1, H_2, ..., H_n$ slučajni događaji koji čine potpun sistem događaja i neka je A neki događaj iz istog prostora elementarnih ishoda. Verovatnoća događaja A se može izračunati po formuli:

$$P(A) = \sum_{j=1}^{n} P(H_j) P(A \mid H_j) \qquad (*)$$

Slučajni događaji $H_1, H_2, ..., H_n$ se nazivaju **hipoteze**, dok se formula (*) naziva **formula potpune verovatnoće.**

Dokaz formule potpune verovatnoće se zasniva na razlaganju događaja A na disjunktne delove, što proizilazi iz

$$A = A\Omega = A \cap (H_1 + H_2 + ... + H_n) = \sum_{j=1}^{n} AH_j$$

Kako su događaji AH_i i AH_j za $i \neq j$, disjunktni, dobija se da je verovatnoća događaja A:

$$P(A) = P\left(\sum_{j=1}^{n} AH_j\right) = \sum_{j=1}^{n} P(AH_j).$$

Kad se verovatnoće preseka AH_j izraze preko uslovnih verovatnoća $P(AH_j) = P(H_j)P(A \mid H_j)$, dobija se formula potpune verovatnoće (*).

Znači da se korišćenjem uslovnih verovatnoća $P(A \mid H_j)$ dobija verovatnoća događaja A. Stoga je ova formula primenljiva ako se te uslovne verovatnoće mogu (relativno) lako na osnovu uslova zadatka i izračunati.

Verovatnoće $P(H_j)$ se nazivaju **apriorne verovatnoće hipoteza.** Ako se zna da se realizovao događaj A možemo odrediti verovatnoće $P(H_j \mid A)$, za svako *j=1,2,...n*. Te verovatnoće se nazivaju **aposteriorne verovatnoće hipoteza.**

Koristeći formulu potpune verovatnoće aposteriorne verovatnoće se računaju po formuli:

$$P(H_k \mid A) = \frac{P(H_k)P(A \mid H_k)}{\sum_{j=1}^{n} P(H_j)P(A \mid H_j)}. \qquad (**)$$

Formula (**) se naziva **Bajesova formula**.

(nastavak na str. 8)

☺ U opštem slučaju važi: $\sum_{k=1}^{n} P(H_k \mid A) = 1$, što se može primeniti pri rešavanju zadataka: a) kao provera da je zbir svih izračunatih verovatnoća jednak 1, b) kao mogućnost da se jedna od tih uslovnih verovatnoća izračuna pomoću ostalih (n-1) uslovnih verovatnoća.

Tomas Bajes (1702-1761), engleski matematičar, po profesiji sveštenik. Kao matematičar je bio član Londonskog kraljevskog društva. Osim formule koju je dokazao i koja se naziva njegovim imenom, ustanovio je i poseban pristup u teoriji statističkog zaključivanja.

Primer 3 . Klasični primer za primenu formule potpune verovatnoće

U četiri istovetne kutije nalaze se kuglice istih dimenzija, ali različitih boja: u prvoj su 2 bele i 3 žute, u drugoj 3 bele i 2 zelene, u trećoj 4 bele, 1 žuta i 1 zelena i u četvrtoj 2 žute i 2 zelene. Na slučajan način se iz jedne od kutija bira jedna kuglica. Odrediti verovatnoću da je žute boje.

Rešenje.

I rešenje U realizaciji eksperimenta prvo biramo kutiju, pa onda kuglicu iz nje. Pošto je naglašeno da ima 4 kutije, to se, prirodno, pojavljuje potpun sistem od 4 događaja $H_1,\ldots,H_4$ koji redom označavaju da je izabrana prva, druga, treća, odnosno četvrta kutija. Rečeno je da su kutije istovetne, a to znači da će biti $P(H_1)=1/4$, …, $P(H_4)=1/4$. Događaj koji se posmatra u ovom eksperimentu je izbor žute kuglice. Neka je to događaj A. Na osnovu toga što je sadržaj kutija poznat, biće

$$\mathrm{P(A)} = \frac{1}{4}\frac{3}{5} + \frac{1}{4}\frac{0}{5} + \frac{1}{4}\frac{1}{6} + \frac{1}{4}\frac{2}{4}.$$

Kad se izračuna vrednost izraza dobija se 19/60.

II rešenje Može se posmatrati i potpun sistem događaja koji čine događaji G_1 i G_2, gde je G_1 događaj da je izabrana kutija u kojoj nema žutih kuglica, a G_2 događaj da je izabrana neka od kutija u kojoj ima žutih kuglica. Onda je $P(G_1)=1/4$, a $P(G_2)=3/4$. Uslovna verovatnoća događaja A pri prvoj hipotezi je $P(A/G_1)=0$. Ali se verovatnoća izbora žute kuglice pri drugoj hipotezi mora da računa po formuli potpune verovatnoće, jer postoje razne mogućnosti u zavisnosti od sastava kutija. Zato je

$$P(A/G_2)= \frac{1}{3}\frac{3}{5} + + \frac{1}{3}\frac{1}{6} + \frac{1}{3}\frac{2}{4}.$$

Kad se sve izračuna po formuli potpune verovatnoće dobija se da je verovatnoća događaja A jednaka 19/60. Rezultat je naravno isti kao u prvom rešenju.

Prvo rešenje je prirodnije i direktno vodi do rezultata. Drugo rešenje je dato da se vidi mogućnost formiranja drukčijeg potpunog sistema događaja.

The general form of Bayes's theorem is $P(H_k \mid A) = \dfrac{P(H_k)P(A \mid H_k)}{\sum_{j=1}^{n} P(H_j)P(A \mid H_j)}$

where the events $H_1, H_2, ..., H_n$ are mutually exclusive and exhaustive.

Binomna šema

Posmatra se opit u kome događaj *A* može da se realizuje sa verovatnoćom *P(A)=p*. Neka se taj opit izvodi *n* puta pod istim uslovima, tj. neka je u svakom opitu $P(A)=p, P(\overline{A})=1-p=q$ i neka su sva izvođenja međusobno nezavisna. Tada je verovatnoća da se u n opita događaj *A* realizuje tačno *k* puta (a da se događaj $\overline{A}$ realizuje *n-k* puta) jednaka:

$$P_{n,k}=\binom{n}{k}p^k q^{n-k}, \quad k=0,1,...n$$

Opisana situacija se naziva **binomna šema**. Koristi se i naziv **Bernulijeva šema**.

Kada se, za razne vrednosti n i p, računaju binomne verovatnoće $P_{n,k}$ primećuju se sledeće mogućnosti: a) da binomne verovatnoće $P_{n,k}$ u početku (za *k=0,1,...*) rastu, a zatim, počev od neke vrednosti *k* opadaju, ili b) stalno opadaju ili c) stalno rastu. Znači, u slučaju a), da će za neku vrednost *k* važiti

$$P_{n,k-1}\le P_{n,k}\ge P_{n,k+1}.$$

Iz poslednje nejednakosti dobija se da broj *k'*, za koji je verovatnoća $P_{n,k'}$ pojavljivanja događaja *A* najveća moguća, zadovoljava nejednakosti:

$$np+p-1\le k'\le np+p \qquad (*)$$

Dakle, u slučaju da je broj *(np+p)* prirodni broj, postojaće dve vrednosti za *k'*, a inače samo jedna. Za dobijeni broj *k'* se kaže da je najverovatnija vrednost pojavljivanja događaja *A*. Dobijeni rezultat se uklapa i u situacije b) i c). Slučaj b) se javlja ako je *np+p* manje od 1, a slučaj c) ako je *np+p* veće od *n*.

Na slici su date verovatnoće iz binomne šeme za slučaj n=5 i p=0.5, 0.2 i 0.8

(nastavak na str. 10)

☺U formuli kojom se računaju binomne verovatnoće pojavljuju se tzv. binomni koeficijenti $\binom{n}{k}$ (čita se "n nad k"), koji se računaju po formuli $\frac{n!}{k!(n-k)!}$, gde je n! oznaka za proizvod prirodnih brojeva od 1 do n, tzv. "n faktorijel".

U kombinatorici se dokazuju mnoge osobine binomnih koeficijenata, npr. da su simetrični, tj. da je $\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k}$, i da je njihov zbir $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}=2^n$. Mnoge osobine proizilaze iz interpretacije binomnog koeficijenta kao broja načina da se iz skupa od n različitih elementa izabere podskup od k elemenata, što predstavlja tzv. kombinacije bez ponavljanja.

Primer 4. Binomna šema

Dve kockice se bacaju 10 puta. Odrediti verovatnoću da se tačno 3 puta dobije zbir 8. Odrediti koji je najverovatniji broj pojavljivanja zbira 8, i sa kojom verovatnoćom se taj događaj dešava.

Rešenje.

Pri bacanju dve kockice zbir će da bude 8, ako su rezultati (2,6), (6,2), (3,5), (5,3), (4,4). Kako je broj mogućih ishoda, koji su jednakoverovatni, jednak 36, to je verovatnoća da se dobije zbir 8 jednaka 5/36. Da bi se od deset bacanja kockica 3 puta dobio zbir 8, verovatnoća je, po binomnoj šemi, jednaka

$$P_{10,3}=\binom{10}{3}p^3q^{10-3}=120p^3q^7=120\cdot(5/36)^3\cdot(31/36)^7\approx 0.113.$$

Najverovatniji broj pojavljivanja zbira 8 je, prema nejednakosti (*) jednak 1. Odgovarajuća verovatnoća je 0.362.

☺Uz digitrone i kompjutere ovo nije teško računati, ali ovakvi zadaci su rešavani i ranije, kad takve "pomoći " nije bilo. Zato su izračunate vrednosti verovatnoća $P_{n,k}$, za razne vrednosti n i k, bile zapisane u obliku tablica, da se olakša posao svima kojima su te verovatnoće bile potrebne u radu.

☺ Polazeći od $P_{n,k-1}\le P_{n,k}\ge P_{n,k+1}$ dobija se iz prve nejednakosti:

$$\binom{n}{k-1}p^{k-1}q^{n-k+1}\le\binom{n}{k}p^kq^{n-k},$$

odnosno

$$\frac{1}{(n-k+1)}\frac{n!}{(k-1)!(n-k)!}p^{k-1}q^{n-k}q\le\frac{1}{k}\frac{n!}{(k-1)!(n-k)!}p^{k-1}pq^{n-k}$$

Posle skraćivanja se dobija:

$$\frac{1-p}{n-k+1}\le\frac{p}{k},\quad \text{tj.}\quad k\le np+p.$$

Na sličan način iz druge nejednakosti se dobija:

$$\frac{1-p}{n-k}\ge\frac{p}{k+1},\qquad \text{tj.}\quad k\ge np+p-1.$$

Binomna šema se, po svojoj definiciji, vezuje za ponavljanje eksperimenta pod istim uslovima, a tome odgovara slučajni izbor elemenata sa vraćanjem. Međutim, ako se analizira slučajni izbor bez vraćanja, ali iz populacije koja ima veoma veliki broj elemenata, dobijaju se verovatnoće bliske onima iz binomne šeme. Naime, neka u jednoj seriju od a artikala ima m artikala prve vrste, a ostalih *(a-m)* druge vrste. Ako se uzima ukupno n puta sa vraćanjem po jedan artikal, tada je verovatnoća da će među njima biti tačno k artikala prve vrste jednaka:

$$P_{n,k} = \binom{n}{k}\left(\frac{m}{a}\right)^k\left(\frac{a-m}{a}\right)^{n-k} = \binom{n}{k}\left(\frac{m}{a}\right)^k\left(1-\frac{m}{a}\right)^{n-k}, \; k = 0,1,\ldots,n.$$

Ako se uzima n artikala odjednom (ili n puta po jedan artikal, ali bez vraćanja), verovatnoća da će se dobiti ukupno k artikala prve vrste je

$$P^*_{n,k} = \frac{\binom{m}{k}\binom{a-m}{n-k}}{\binom{a}{n}} \quad , k=0,1,2,...$$

(za one vrednosti k za koje binomni koeficijenti u izrazu za $P^*_{n,k}$ imaju smisla).

Verovatnoće $P^*_{n,k}$ su **hipergeometrijske verovatnoće** i primećuje se da je

$$P^*_{n,k} \neq P_{n,k}$$

Međutim, ako se m i a povećavaju i teže beskonačnosti, ali tako da $\frac{m}{a} \to p,\; 0 < p < 1$, tada hipergeometrijske verovatnoće teže binomnim verovatnoćama:

$$P^*_{n,k} \to P_{n,k}.$$

Znači, verovatnoće iz binomne šeme možemo primenjivati i za nalaženje približne vrednosti verovatnoća kod izbora bez vraćanja iz populacije vrlo velikog obima, pri čemu je aproksimacija bolja ukoliko je n “neuporedivo” manje od m i od a-m.

(*nastavak na str. 12)*

Primer 5. Binomne i hipergeometrijske verovatnoće

Od 100 artikala je 80 prve, a 20 druge vrste. Na slučajan način se biraju 3 artikla. Odrediti verovatnoću da su dva prve, a jedan druge vrste, ako je izbor: a) sa vraćanjem, b) bez vraćanja. Kako se menja rezultat, ako se biraju tri artikla, ali je na raspolaganju 800 artikala prve i 200 artikala druge vrste?

Rešenje.

Ako je izbor sa vraćanjem, onda je u pitanju model binomne šeme, sa p=8/10, n=3, k=2 i verovatnoća je

$$P_{3,2} = \binom{3}{2} p^2 q^{3-2} = 3p^2 q \ = 0.384 \,.$$

Ako je izbor bez vraćanja onda su u pitanju hipergeometrijske verovatnoće i dobija se da je verovatnoća

$$\mathrm{P}^*_{3,2} = \frac{\binom{80}{2}\binom{20}{1}}{\binom{100}{3}} \approx 0.39085.$$

Ako je pak ukupan broj artikala 1000, a izbor sa vraćanjem, verovatnoća će biti ista, jer je p isto, ali će u slučaju izbora bez vraćanja sad biti

$$\mathrm{P}^*_{3,2} = \frac{\binom{800}{2}\binom{200}{1}}{\binom{1000}{3}} \approx 0.38467.$$

Ovaj primer ilustruje prethodno navedeno tvrđenje o konvergenciji hipergeometrijskih verovatnoća ka verovatnoćama iz binomne šeme.

Primer 6. Binomne verovatnoće

Verovatnoća događaja A je 0.2 i ne menja se u toku eksperimenata, čiji su ishodi međusobno nezavisni. Koliko puta treba ponoviti eksperiment da bi se, sa verovatnoćom većom od 0.9 događaj A desio bar jednom?

Rešenje.

Neka D označava da se događaj A desio bar jednom u n eksperimenata. Onda je komplement događaja D događaj $\overline{D}$ koji označava da se A nije desio nijednom u posmatranih n eksperimenata. Stoga je

$$P(\overline{D}) = 0.8^n \,.$$

Kako je potrebno da bude $P(D) > 0.9$, onda mora biti $P(\overline{D}) < 0.1$, odnosno

$$0.8^n < 0.1 \,.$$

Rešavanjem te nejednačine dobija se da je n veće od 10.3223, što znači da će za vrednost $n=11$ (a samim tim i za $n>11$) verovatnoća da se A desi bar jednom biti veća od 0.9.

Sledeći zadaci su u vezi sa formulom potpune verovatnoće i binomnom šemom, ali nisu sasvim jednostavni. Možete im pokloniti pažnju tek ako ste sigurno usvojili i razumeli lekciju i primere koji su rešeni i ako ste i samostalno rešili nekoliko zadataka, na primer 7, 8, 9 i 10 od zadataka datih na kraju ove lekcije.

Primer *. Uslovne verovatnoće – "ratne igre"

U vazdušnoj bici učestvuju lovac i bombarder. Prvo lovac gađa bombardera i obara ga sa verovatnoćom 0.2. Ako bombarder nije oboren, uzvraća paljbu i obara lovca sa verovatnoćom 0.3. Ako lovac pri tome nije oboren, bliže je bombarderu i obara ga sa verovatnoćom 0.4. Odrediti verovatnoće događaja: *A*={ oboren je bombarder}, *B*= { oboren je lovac} i *C*= { ni jedan od aviona nije oboren}.

Rešenje:

Događaj *A* je unija disjunktnih događaja A_1 ={ lovac obara bombardera pri prvom gađanju} i A_2 ={ lovac obara bombardera pri drugom gađanju}, pa je $P(A)=P(A_1 \cup A_2)=P(A_1)+P(A_2)$. Po uslovu zadatka je $P(A_1)=0.2$. Događaj A_2 može se posmatrati kao presek događaja *D* ={ lovac ne obara bombardera pri prvom gađanju}, E ={ bombarder ne obara lovca pri prvom gađanju} i F ={ lovac obara bombardera pri drugom gađanju}. Kako je $A_2 = DEF$, to je

$$P(A_2)=P(DEF)=P(D)P(E \mid D)P(F \mid DE)=(1-0.2)(1-0.3)0.4=0.224$$

Prema tome, verovatnoća događaja *A* je 0.424.

Događaj *B* se može posmatrati kao presek događaja *D* i $\overline{E}$.

$$P(B)=P(D\overline{E})=P(D)P(\overline{E} \mid D)=(1-0.2)0.3=0.24$$

Kako događaji *A, B* i *C* čine potpun sistem događaja, to je $P(C)=0.336$.

Primer X. Formula potpune verovatnoće *(malo složeniji primer)*

U *n* jednakih kutija, koje su poređane jedna do druge, nalazi se po *M* jednakih kuglica. Kuglice su raspoređene na slučajan način, ali uz dopunski uslov: broj belih kuglica u svakoj kutiji može, sa jednakom verovatnoćom biti 0, 1, 2. Na slučajan način se iz jedne od kutija bira jedna kuglica. Odrediti verovatnoću događaja D da je izabrana kuglica bele boje.

Rešenje:

Postoje dva potpuna sistema događaja:

(I) A_1 - izbor iz prve kutije, A_2 - izbor iz druge kutije, ..., A_n - izbor iz n-te kutije,

(II) B_1 - izbor iz jedne od kutija u kojoj nema belih kuglica, B_2 - izbor iz jedne od kutija u kojoj ima po jedna bela kuglica i B_3 - izbor iz jedne od kutija u kojoj su po dve bele kuglice.

a) Ako se koristi potpun sistem događaja $A_1, A_2, ..., A_n$ tada su apriorne verovatnoće međusobno jednake $P(A_i)=1/n$, *i=1,2,...n,* dok se uslovne verovatnoće $P(D \mid A_j)$ računaju po FPV (formuli potpune verovatnoće ☺) i jednake su:

$$P(D \mid A_j)=\frac{1}{3}\left(\frac{0}{M}+\frac{1}{M}+\frac{2}{M}\right)=\frac{1}{M}.$$

Zato se dobija, po FPV primenjenoj na događaj D, da je njegova verovatnoća:

$$P(D)=\sum_{j=1}^{n}P(A_j)P(D\mid A_j)=n\cdot\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{M}=\frac{1}{M}.$$

b) Ako se koristi potpun sistem događaja B_1, B_2, B_3 tada su verovatnoće hipoteza jednake:

$$P(B_1)=P(B_2)=P(B_3)=1/3,$$

a uslovne verovatnoće: $P(D\mid B_1)=0/M$, $P(D\mid B_2)=1/M$, $P(D\mid B_3)=2/M$.

I po formuli potpune verovatnoće se dobija:

$$P(D)=\sum_{j=1}^{3}P(B_j)P(D\mid B_j)=\frac{1}{3}\left(\frac{0}{M}+\frac{1}{M}+\frac{2}{M}\right)=\frac{1}{M}.$$

Primer X'. Formula potpune verovatnoće *(izmenjeni uslovi u odnosu na Primer X)*

U n jednakih kutija, koje su poređane jedna do druge, nalazi se po M jednakih kuglica. Kuglice su raspoređene na slučajan način, ali uz dopunski uslov: u nekih p kutija nema belih kuglica, u nekih q kutija je po jedna bela, a u nekih r kutija su po dve bele. Na slučajan način se iz jedne od kutija bira jedna kuglica. Odrediti verovatnoću događaja D da je izabrana kuglica bele boje.

Rešenje:

Postoje dva potpuna sistema događaja:

(I) A_1 - izbor iz prve kutije, A_2 - izbor iz druge kutije, ..., A_n - izbor iz n-te kutije,

(II) B_1 - izbor iz jedne od kutija u kojoj nema belih kuglica, B_2 - izbor iz jedne od kutija u kojoj ima po jedna bela kuglica i B_3 - izbor iz jedne od kutija u kojoj su po dve bele kuglice.

Ako se koristi potpun sistem događaja $A_1, A_2, ...A_n$, pošto su apriorne verovatnoće jednake: $P(A_i)=1/n$, *i=1,2,...n,* a verovatnoće $P(D|A_j)$ su jednake:

$$P(D\mid A_j)=\frac{p}{n}\cdot\frac{0}{M}+\frac{q}{n}\cdot\frac{1}{M}+\frac{r}{n}\cdot\frac{2}{M}=\frac{q+2r}{nM}.$$

Na osnovu formule potpune verovatnoće verovatnoća događaja A je jednaka:

$$P(D)=\sum_{j=1}^{n}P(A_j)P(D\mid A_j)=n\cdot\frac{1}{n}\cdot\frac{q+2r}{nM}=\frac{q+2r}{nM}.$$

Ako se koristi potpun sistem događaja B_1, B_2, B_3 tada su verovatnoće hipoteza jednake:

$$P(B_1)=\frac{p}{n},\; P(B_2)=\frac{q}{n},\; P(B_3)=\frac{r}{n}.$$

Kako su uslovne verovatnoće događaja D jednake

$$P(D\mid B_1)=\frac{0}{M},\; P(D\mid B_2)=\frac{1}{M},\; P(D\mid B_3)=\frac{2}{M},$$

ponovo se, po formuli potpune verovatnoće, dobija:

$$P(D)=\sum_{j=1}^{3}P(B_j)P(D\mid B_j)=\frac{p}{n}\cdot\frac{0}{M}+\frac{q}{n}\cdot\frac{1}{M}+\frac{r}{n}\cdot\frac{2}{M}=\frac{q+2r}{nM}.$$

Primer XX. Specijalni slučaj vremenske prognoze

U jednoj oblasti u toku dana može biti ili kišovito ili sunčano vreme. Ako je dan sunčan, verovatnoća da će sledećeg dana padati kiša je 0.2, a ako je dan kišovit, verovatnoća da će sledećeg dana biti sunčano je 0.4. a) Ako je u četvrtak (13.marta) padala kiša, odrediti verovatnoću da u nedelju (16.marta) bude sunčano vreme. b) Ako je 13.marta padala kiša, koja je verovatnoća da će 13.aprila padati kiša?

Rešenje:

a) Prema uslovima zadatka, verovatnoća da će u petak biti sunčano je $P(P_s)=0.4$ a verovatnoća da će u petak padati kiša je $P(P_k)=1-P(P_s)=0.6$.

Verovatnoća da će u subotu biti sunčano je, po formuli potpune verovatnoće:

$$P(S_s)=P(S_s \mid P_k)P(P_k)+P(S_s \mid P_s)P(P_s)=0.4\cdot 0.6+0.8\cdot 0.4=0.56$$

Verovatnoća da će u subotu biti kiša je $P(S_k)=1-P(S_k)=0.44$.

Konačno, verovatnoća da u nedelju bude sunčano je:

$$P(N_s)=P(N_s \mid S_k)P(S_k)+P(N_s \mid S_s)P(S_s)=0.4\cdot 0.44+0.8\cdot 0.56=0.624$$

b) Postupak, kojim smo rešili zadatak pod a) mogli bismo nastaviti i tako doći do tražene verovatnoće. Međutim, pogodnije je rešavati "unazad". Neka D_k označava da će *k*- ti dan posle uočenog 13.marta biti kišovit. Tada $\overline{D_k}$ znači da će tog dana biti sunčano. Po uslovima zadatka imamo:

$$P(D_{31})=P(D_{31} \mid D_{30})P(D_{30})+P(D_{31} \mid \bar{D}_{30})P(\overline{D_{30}})=$$

$$=0.6\cdot P(D_{30})+0.2\cdot(1-P(D_{30}))=0.2+0.4\cdot P(D_{30})\cdot$$

Znači da je, za svako *n=1,2,...*

$$P(D_n)=0.2+0.4\cdot P(D_{n-1})$$

Zamenjujući redom vrednosti za $P(D_k)$, *k=30,29,...* dobijamo, zaokruženo na tri decimale:

$$P(D_{31})=0.2\cdot(1+0.4+0.4^2+...+0.4^{29})+0.4^{30}P(D_1)=\ 0.2\frac{1-0.4^{30}}{1-0.4}+0.4^{30}0.6\approx 0.333$$

Analogno je $P(D_n)=0.2(1+0.4+0.4^2+...+0.4^{n-1})+0.4^n\cdot P(D_1)$.

Odatle se zaključuje da je:

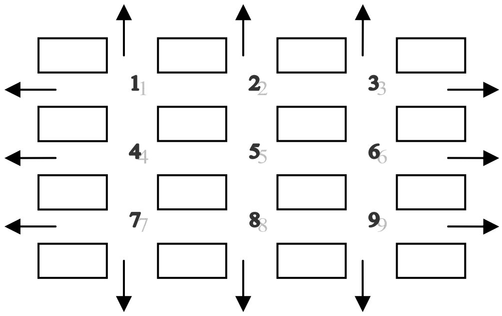
$$\lim_{n\to\infty} P(D_n)=\frac{1}{3}$$

što znači da je, pri uslovima navedenim na početku, verovatnoća da nekog dana, dugo vremena posle jednog posmatranog dana, pada kiša, jednaka 1/3 i ne zavisi od vremena koje bilo tog posmatranog dana.

Primer XXX. Slučajno kretanje u ravni

U pravougaonom lavirintu (videti sliku na sledećoj strani) se nalazi pas, koji na slučajan način bira put, krećući se sa jednakom verovatnoćom u sva 4 smera.

a) Za svaku od označenih raskrsnica odrediti verovatnoću da će pas, polazeći sa te raskrsnice, stići do jednog od izlaza na južnoj strani lavirinta.



Slika 2. Lavirint

Svi izlazi su obeleženi strelicama na slici. Smatra se da je kretanje završeno ako pas dođe do bilo kog izlaza.

b) Ako se 10 puta ponovi opisani eksperiment, a polazna tačka bude raskrsnica 5, odrediti verovatnoću da se 3 od tih 10 eksperimenata završe uspešno, tj. izlaskom iz lavirinta na neki od južnih izlaza.

Rešenje:

a) Neka P_j označava verovatnoću da će polazeći sa raskrsnice *j* pas stići na neki južni izlaz. Prema uslovima zadatka se dobijaju, po formuli potpune verovatnoće, jednačine koje povezuju sve ove verovatnoće:

$$P_1 = \frac{1}{4}\left(0+0+P_2+P_4\right),\ P_2 = \frac{1}{4}\left(P_1+0+P_3+P_5\right),$$

$$P_3 = \frac{1}{4}\left(P_2+0+0+P_6\right),\ P_4 = \frac{1}{4}\left(0+P_1+P_5+P_7\right),$$

$$P_5 = \frac{1}{4}\left(P_4+P_2+P_6+P_8\right),\ P_6 = \frac{1}{4}\left(P_5+P_3+0+P_9\right),$$

$$P_7 = \frac{1}{4}\left(0+P_4+P_8+1\right),\ P_8 = \frac{1}{4}\left(P_7+P_5+P_9+1\right),$$

$$P_9 = \frac{1}{4}\left(P_8+P_6+0+1\right).$$

Rešavanjem ovog sistema linearnih jednačina dobija se:

$$P_1 = P_3 = 0.071,\ P_2 = 0.098,\ P_4 = P_6 = 0.187,$$

$$P_5 = 0.25,\ P_7 = P_9 = 0.428,\ P_8 = 0.526.$$

Pri tome je P_5 tačan broj, a ostali su dati zaokruženi na tri decimale.

b) Primenom binomne šeme dobija se da je tražena verovatnoća, zaokružena na pet decimala jednaka :

$$P_{10,3} = \binom{10}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^3\left(\frac{3}{4}\right)^7 \approx 0.23028\ .$$

Z A D A C I

1. Neka je $P(A \cap \overline{B})$=0.2, $P(\overline{A} \cap B) = 0.1, P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 0.5$. Odrediti uslovnu verovatnoću P(A ∕ B).

2. Ako se bacaju dve kockice odrediti verovatnoću da je zbir 10, ako se zna a) da je zbir veći od 8, b) da je zbir paran broj, c) da je zbir deljiv sa 5.

3. Neka je P(A)=0.2, P(B)=0.3 i P(A ∕ B)+P(B ∕ A) = 0.6. Odrediti verovatnoću istovremene realizacije događaja A i B. Da li postoje vrednosti za verovatnoću događaja A pri kojima zadatak nema rešenja ako se druge dve verovatnoće ostave neizmenjene?

4. Neka je uslovna verovatnoća događaja A ako se desio događaj B manja od verovatnoće događaja A. Odrediti odnos verovatnoće događaja B i uslovne verovatnoće događaja B ako se desio događaj A.

5. Ako je verovatnoća događaja B pozitivna, pokazati da važi $P(A/B) \geq \frac{P(A)+P(B)-1}{P(B)}$.

6. Ako je P(A∩B)=0.2, P(A)=0.3 i $P(\overline{A \cup B}) = 0.4$, odrediti $P(A \cap B / \overline{A \cup B})$.

7. Ako se bacaju dve kocke i dobije zbir 8, odrediti verovatnoću: a) na prvoj kocki je dobijen broj veći od 4, b) razlika brojeva na prvoj i drugoj kocki je jednaka 2.

8. U kutiji su bela i crna kuglica. Na slučajan način izaberemo jednu. Ako je ona bele boje, vratimo je u kutiju, a ako je crne boje, vratimo je u kutiju, ali dodamo još dve bele i tri crne. U sledećem izvlačenju se primenjuje isti postupak. Odrediti koja verovatnoća je veća: da posle tri biranja imamo da su izabrane kuglice bile crna, bela, crna ili bela, crna, bela.

9.Iz kutije u kojoj su bile 3 bele i 4 crvene kuglice na slučajan način izaberemo jednu i prebacimo u drugu kutiju u kojoj su već bile 4 crvene kuglice i 5 belih. Odrediti verovatnoću da se posle toga iz druge kutije izabere bela kuglica.

10. Bacamo novčić. Ako se dobije „pismo“, bacamo kocku, inače bacamo dve kocke. Odrediti verovatnoću da se dobije (broj ili zbir) 6.

11. Za vreme nestanka struje jedne večeri policija je privela 100 osumnjičenih i onda je na slučajan način izabrana jedna od tih osoba da prva bude ispitana na detektoru laži. Detektor u 90% slučajeva otkriva ako neko jeste kriv, a u 98% slučajeva potvrđuje da neko jeste nevin. Ako je među privedenim osobama 12 zaista učinilo neko krivično delo te večeri, odrediti verovatnoću da je prvi ispitanik proglašen krivim. Ako jeste proglašen krivim, odrediti verovatnoću da on zaista jeste kriv.

12. Prema policijskim statistikama u jednom velikom gradu šansa da nečiji stan bude obijen je 1:5000. Alarmni uređaj koji je nabavio jedan stanovnik tog grada je reklamiran kao siguran u 95% slučajeva (tj. ako je provalnik ušao u stan, alarm će se oglasiti u 95% slučajeva). Ali, taj isti alarm je u proteklom periodu 4 puta digao lažnu uzbunu. Ako se alarm sad opet oglasio, da li vlasnik treba da zove policiju, ili ne, tj. da li je veća šansa da lopov jeste u kući nego da je opet lažna uzbuna? (al' je ovo komplikovano :))

13. U kutiji je jedan novčić koji na obe strane ima „pismo" i 7 ispravnih novčića. Jedan novčić je na slučajan način izabran i bačen 7 puta. Ako je svih sedam puta dobijeno „pismo" odrediti verovatnoću da je izabrani novčić ispravan.

14. Bacamo crvenu i zelenu kocku i posmatramo događaje: A – na crvenoj kocki je dobijen jedan od brojeva 3,4,5, B – na zelenoj kocki je dobijen broj 1 ili broj 2 i događaj C – zbir brojeva dobijenih na kockama je 7. Ispitati nezavisnost događaja A, B i C.

15. Bacamo crvenu i zelenu kocku i posmatramo događaje: A – na crvenoj kocki je dobijen neparan broj, B – na zelenoj kocki je dobijen neparan broj i događaj C – zbir brojeva dobijenih na kockama je neparan. Ispitati da li su događaji A, B i C nezavisni.

16. Novogodišnji ukras za jelku čini 25 sijalica koje su redno povezane. Verovatnoća da jedna sijalica pregori pri prvom uključivanju je 0.01. Odrediti verovatnoću da će novogodišnji ukras zasijati pri prvom uključivanju.

17. Koliko puta treba bacati četiri numerisane kocke da bi verovatnoća da se dobije bar jedan par šestica bila veća od 0.5?

18. Obalska straža je dobila poziv sa jednog ribarskog broda koji se nasukao, ali je veza prekinuta pre nego što su saopštili koordinate mesta gde se nalaze. Neka je verovatnoća da se nalaze južno od luke jednaka 0.44, a verovatnoća da su severno je 0.56. U potragu se šalje 28 helikoptera, od kojih svaki, nezavisno od ostalih uočava nasukani brod sa verovatnoćom 0.55. Koliko helikoptera treba poslati u koju oblast, da bi šanse za pronalaženje broda bile najveće?

19. Na slučajan način se formira niz od dekadnih cifara 0,1,...,9. Odrediti koja je najmanja dužina niza da on sa verovatnoćom većom od 0.8 sadrži bar jednu cifru 9.

20. Koristeći tablice slučajnih cifara modelirati po 20 (odnosno 100, ako se radi na računaru) eksperimenata opisanih u zadacima 1, 3, 8-20, a zatim empirijskom frekvencijom oceniti verovatnoće traženih događaja.

PITANJA UZ LEKCIJU 2

1. Definicija uslovne verovatnoće
2. Osobine uslovne verovatnoće
3. Definicija nezavisnosti dva događaja.
4. Osobine nezavisnosti događaja.
5. Nezavisnost u parovima i nezavisnost u ukupnosti.
6. Nezavisnost i disjunktnost događaja.
7. Dokaz formule potpune verovatnoće.
8. Bajesova formula aposteriornih verovatnoća hipoteza.
9. Binomna šema.
10. Osobine binomnih koeficijenata.
11. Najveće verovatnoće u binomnoj šemi.
12. Hipergeometrijske verovatnoće i veza sa verovatnoćama binomne šeme.

Napraviti program za igru na računaru.
(Mogući scenario: bacanje kockica, biranje karata iz špila, LOTO, BINGO, gađanje pokretne mete...)